

**DS 3 le 28 novembre 2011**  
**CHIMIE – MÉCANIQUE – ÉLECTRICITÉ**

**NB :** Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## Problème 1

DEUG Université d'Orsay 2006 (extrait)

*Partie 2 : Propriétés acido-basiques*

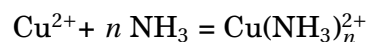
On dose un volume  $V_b = 10$  mL d'une solution d'ammoniaque de  $pK_a = 9,2$  de concentration  $C_b$  inconnue par une solution d'acide chlorhydrique de concentration  $C_a$  égale à  $0,10$  mol.L<sup>-1</sup>. L'équivalence est obtenue pour un volume de solution acide  $V_a$  égale à 9 mL.

**2.1.** Ecrire l'équation-bilan de la réaction de dosage. Montrer que la réaction est quasiment totale.

**2.2.** En déduire la concentration initiale  $C_b$  de la solution d'ammoniaque.

*Partie 3 : Propriétés complexantes de NH<sub>3</sub>*

On définit les constantes de formation globale de complexation,  $\beta_n$ , comme les constantes d'équilibre des réactions :

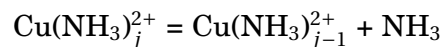


Les tables donnent :

$n$	1	2	3	4
$\log(\beta_n)$	4,2	7,6	10,6	12,6

**3.1.** Ecrire les expressions de  $\beta_n$

Ecrire les expressions des constantes de dissociations successives  $K_{dj}$ ,  $j = 1, \dots, 4$



En déduire une relation entre les constantes de dissociations successives  $K_{dj}$  et les constantes de formation globale de complexation  $\beta_n$ .

En déduire les valeurs numériques de  $pK_{dj} = -\log(K_{dj})$ .

**3.2.** En déduire le diagramme de prédominance des espèces contenant l'élément Cu en fonction de  $p\text{NH}_3 = \log[\text{NH}_3]$ .

**3.3.** On considère un bécher de 50 mL contenant un mélange de 20 mL d'une solution d'ammoniaque  $1$  mol.L<sup>-1</sup> et de 20 mL d'une solution de sulfate de cuivre (II),  $\text{CuSO}_4$ , de concentration  $C_1 = 0,01$  mol.L<sup>-1</sup>.

**3.3.1** Expliquer pourquoi  $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$  est majoritaire. Ecrire la réaction globale.

**3.3.2** Quelles sont les concentrations de  $\text{NH}_3$ ,  $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$  et  $\text{Cu}^{2+}$  à l'équilibre.

## Problème 2

Centrale TSI 2007

Le chrome a été découvert par Louis Vauquelin en 1797. Il est présent dans la croûte terrestre (0,03 %), où on le trouve sous forme de chromite ( $\text{FeCr}_2\text{O}_4$ ). On le trouve également dans le règne végétal dans la canne à sucre, la levure de bière, les noix, les épices et dans le règne animal dans le foie et les graisses. Il est utilisé dans le chromage des métaux, le tannage du cuir, la teinture de tissus, dans les matériaux d'enregistrement audio et vidéo (oxyde de chrome) ou encore la fabrication de pigments (le chromate de plomb est un pigment jaune et un oxyde de chrome est utilisé dans l'industrie du verre pour donner la couleur vert émeraude). Il est également employé pour faire des alliages comme l'acier inoxydable (70 % Fe, 20 % Cr, 10 % Ni). Plusieurs de ses sels sont de puissants oxydants.

**Données pour l'ensemble du problème :**

Numéro atomique du chrome :  $Z = 24$

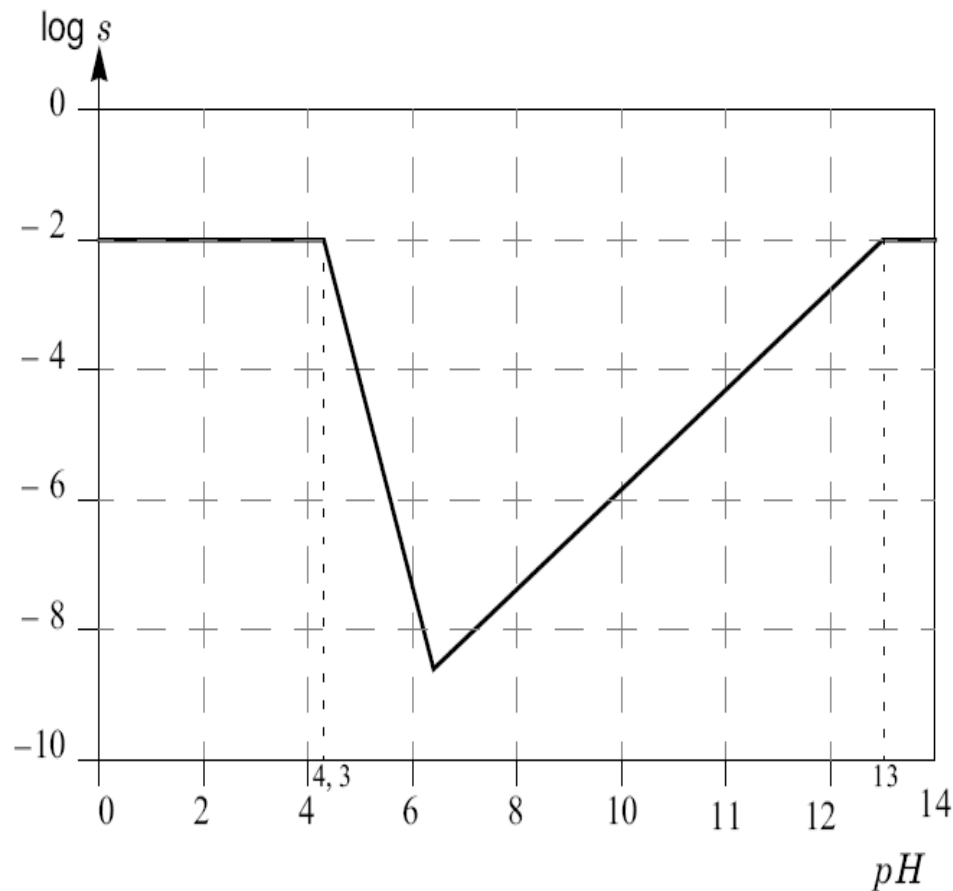
Produit ionique de l'eau à 298 K :  $K_e = 10^{-14}$

Produit de solubilité de  $\text{Cr}(\text{OH})_3$  :  $K_s = 10^{-31}$

Produit de solubilité de  $\text{Ag}_2\text{CrO}_4$  :  $K_s = 10^{-12}$

**1)** En solution aqueuse, le cation  $\text{Cr}^{3+}$  (de couleur verte) donne avec les ions hydroxyde un précipité  $\text{Cr}(\text{OH})_3$  et un complexe  $\text{Cr}(\text{OH})_4^-$ . En solution, la solubilité de l'hydroxyde peut s'écrire :  $s = [\text{Cr}^{3+}] + [\text{Cr}(\text{OH})_4^-]$ . La courbe donnant la variation du logarithme décimal de la solubilité en fonction du pH

est donnée sur la figure, pour une concentration totale  $C_0$  en chrome III en solution.



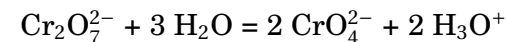
**a)** Pourquoi peut-on parler pour  $\text{Cr}(\text{OH})_3$  d'hydroxyde « amphotère » ?

**b)** Montrer que le graphe précédent permet de placer, sur un axe gradué en pH, les domaines de  $\text{Cr}(\text{OH})_3$ ,  $\text{Cr}^{3+}$  et de  $\text{Cr}(\text{OH})_4^-$ . S'agit-il de domaines de prédominance ou d'existence ?

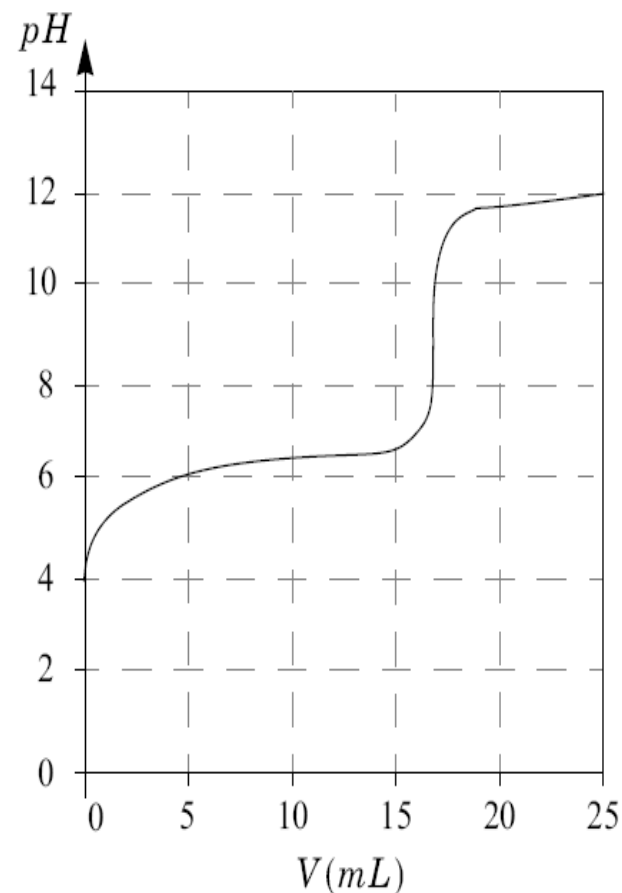
**c)** Quelle est la valeur de  $C_0$  ?

**d)** Définir le produit de solubilité de  $\text{Cr}(\text{OH})_3$  puis retrouver sa valeur à partir des résultats précédents.

**2)** Les ions chromate (jaune)  $\text{CrO}_4^{2-}$  et dichromate (orange)  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  donnent lieu à un équilibre acido-basique :



On dose 100,0 mL d'une solution de dichromate de potassium à la concentration  $C_1$  par une solution d'hydroxyde de sodium à la concentration  $C_2 = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ . L'allure de la courbe de dosage est donnée sur la figure ci-dessous :



**a)** Préciser le nombre d'oxydation du chrome dans les ions chromate et dichromate.

**b)** Quelles sont les électrodes utilisées pour le dosage ?

**c)** Quelle est la réaction de dosage ?

**d)** Déduire de la courbe de dosage la valeur de  $C_1$ .

3) Les ions chromate donnent avec les ions argent  $\text{Ag}^+$  un précipité rouge de chromate d'argent. On néglige dans cette question les propriétés basiques de l'ion chromate.

a) Quelle est la solubilité du chromate d'argent dans l'eau pure ?

b) Le produit de solubilité de  $\text{AgCl}$  vaut  $10^{-10}$ . Quel est le précipité le plus soluble ?

c) Dédurre des résultats précédents une méthode de dosage des ions chlorure.

4) L'ion dichromate est un oxydant classique de la chimie minérale. Il permet, par exemple, d'oxyder, en milieu aqueux acide, les alcools en acides carboxyliques ;

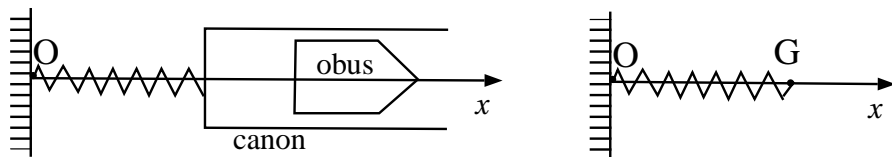
a) Écrire l'équation-bilan de la réaction d'oxydation de l'éthanol  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$  en acide éthanoïque  $\text{CH}_3\text{COOH}$  par les ions dichromate.

b) Citer, en quelques lignes, une application pratique de cette réaction.

## Problème 3

On considère un canon de masse  $M = 800$  kg. Lors du tir horizontal d'un obus de masse  $m = 2$  kg avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  (avec  $v_0 = 600$  m.s<sup>-1</sup>) le canon acquiert une vitesse de recul  $\vec{v}_c = -\frac{m}{M} \vec{v}_0$

Pour limiter la course du canon, on utilise un ressort de raideur  $k_1$ , de longueur à vide  $L_0$  dont l'une des extrémités est fixe et l'autre lié au canon. Le déplacement a lieu suivant l'axe  $Ox$ . Dans la suite, le canon est assimilé à un point matériel situé en son centre de gravité  $G$ .

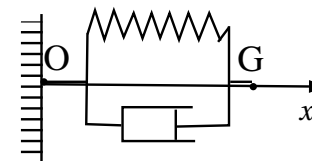


1. Quelle est la longueur du ressort lorsque le canon est au repos ?

2. En utilisant l'énergie mécanique, déterminer la distance de recul  $d$ . En déduire la raideur  $k_1$  pour avoir un recul au maximum égal à  $d$ . AN pour  $d = 1$  m

3. Retrouver la relation entre  $k_1$  et  $d$  en appliquant la relation fondamentale de la dynamique.

4. Quel est l'inconvénient d'utiliser un ressort seul ? Pour lever cette difficulté, on ajoute pour la fin du problème un dispositif amortisseur, exerçant une force de frottement visqueux  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse du canon.



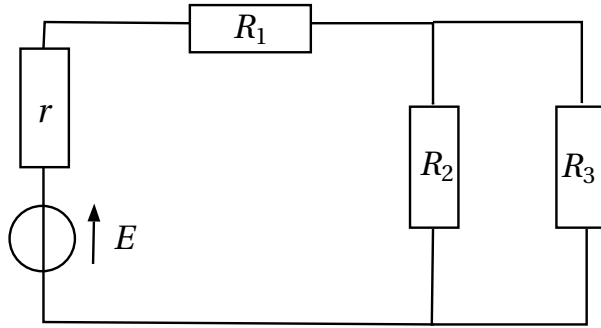
5. Le dispositif de freinage absorbe une fraction  $E_a = 778$  J de l'énergie cinétique initiale. Calculer la nouvelle valeur  $k_2$  de la constante de raideur du ressort avec les données numériques précédentes. Déterminer la pulsation propre de l'oscillateur.

6. Déterminer  $\lambda$  pour que le régime soit critique. AN.

7. Déterminer l'expression de l'élongation  $x(t)$  du ressort, ainsi que celle de la vitesse  $\dot{x}(t)$ . En déduire l'instant  $t_m$  pour lequel le recul est maximal. Exprimer alors ce recul en fonction de  $m$ ,  $v_0$  et  $\lambda$ . L'application numérique redonne-t-elle la valeur de  $d$  précédente ?

## Problème 4

1. On considère le montage suivant constitué d'une source de tension de f.e.m  $E$  et de résistance interne  $r$  reliée à plusieurs conducteurs ohmiques.



- a. Déterminer, en précisant clairement la méthode utilisée, la tension  $U_3$  aux bornes de  $R_3$ , ainsi que l'intensité  $I_3$  du courant qui traverse  $R_3$ . On

exprimera  $U_3$  et  $I_3$  en fonction de  $E$ ,  $r$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ .

- b. Répondre à la même question en remplaçant le générateur de tension par un un générateur de courant  $(I_0, g)$  où  $I_0$  représente le courant électromoteur et  $g$  la conductance du générateur de courant.
2. Soit un dipôle linéaire générateur, modélisé par un générateur de tension  $(E, r)$ . On branche une résistance réglable  $R$  entre les bornes A et B de ce générateur.
- a. Déterminer l'expression du courant  $I$  qui circule dans le circuit :
- b. Déterminer l'expression de la puissance  $\mathcal{P}$  absorbée par la résistance  $R$ . Montrer que  $\mathcal{P}$  est maximum pour une valeur  $R_{\max}$  de  $R$  que l'on calculera ; le montage est alors dit *montage adapté*.
- c. Reprendre le même raisonnement avec un générateur de courant  $(I_0, g)$ . On pourra poser pour les calculs  $G = 1/R$ .

# Commentaires et correction :

## Problème 1

Sujet de DEUG de l'université d'Orsay, très classique et simple !

La partie de dosage permet de constater que quelques uns écrivent encore HCl pour l'acide chlorhydrique, ou se trompe dans le calcul de la constante d'équilibre. C'est bien triste.

La partie sur les complexes concerne le diagramme de distribution des complexes entre le cuivre et l'ammoniaque. Il faut absolument justifier la construction et ne pas la sortir d'un chapeau, il y a des points à gagner pour cela.

Attention, la concentration donnée en ammoniaque était la concentration initiale et ne permet pas a priori de conclure sur le diagramme qui concerne la concentration à l'équilibre des différentes réactions chimiques. Ici l'ammoniaque était dans un tel excès que sa concentration variait peu après réaction.

## Problème 2

Problème du concours Centrale en série TSI

Ce problème s'est révélé très sélectif : il a été très bien résolu par certains, complètement faux chez d'autres.

À la première question, pour montrer que l'hydroxyde est amphotère, il faut signaler les deux couples acide-base impliqués et écrire les réactions acido-basiques qui montrent que l'hydroxyde est bien une base et un acide.

Attention, on ne parle de domaine d'existence que pour les espèces solides comme le précipité. Pour les solutés, donc  $\text{Cr}^{3+}$  et  $\text{Cr}(\text{OH})_4^-$ , on introduit des domaines de prédominance car ils sont toujours présents quelque soit le pH. Il faut savoir lire le diagramme de distribution proposé ici, notamment en déduire la valeur du  $K_s$ .

Le calcul des nombres d'oxydation et le calcul de la solubilité dans l'eau pure doivent être parfaitement connus.

Attention au mauvais réflexe  $c_a V_a = c_b V_b$  qui ne fonctionnait pas ici pour le dosage acido-basique car la réaction de dosage faisait apparaître 2 moles de  $\text{OH}^-$ . Ne pas hésiter dans ce cas à refaire un tableau d'avancement.

L'application attendue à la fin est l'éthylotest qui passe de l'orange au vert en présence d'air chargé d'alcool.

## Problème 3

Cet exercice permettait de faire un bilan de connaissance sur les oscillateurs et sur les bilans énergétiques.

Trop parmi vous oubliez encore de signaler le référentiel (galiléen ou non) et le système étudié dès la première question. Il faut s'y astreindre dès lors qu'on fait de la mécanique.

Les premières questions exploitaient la conservation d'énergie du système. Il faut toujours justifier cette propriété en signalant les forces dérivant d'une énergie potentielle et en vérifiant que les autres forces ont un travail nul.

Le sujet imposait la définition de la variable  $x$ . Dans ce cas, il faut respecter ce choix. J'ai encore trouvé beaucoup d'erreurs sur l'expression de la force du ressort. À retravailler absolument !

Il faut absolument connaître par cœur les solutions des équations différentielles linéaires du 2ème ordre pour tous les régimes possibles.

## Problème 4

Exercice simple construit pour tester vos connaissances sur les réseaux. J'ai lu beaucoup de calculs très compliqués. Il faudra apprendre avec le temps à choisir les stratégies les plus efficaces. Pour cela il faut connaître sur le bout des doigts toutes les méthodes.

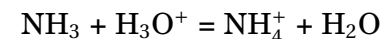
La deuxième partie reprend, dans un cas simple, un calcul que nous reprendrons dans le chapitre ELEC 5 sur la puissance. Il y avait une idée de calcul à imaginer pour trouver un maximum de puissance, qui consistait tout simplement à dériver l'expression. Très classique.

## Problème 1

DEUG Université d'Orsay 2006

*Partie 2 : Propriétés acido-basiques*

2.1. La réaction de dosage est :



La constante d'équilibre est  $K = \frac{1}{K_A} = 10^{9,2}$ . La réaction est quasi-totale.

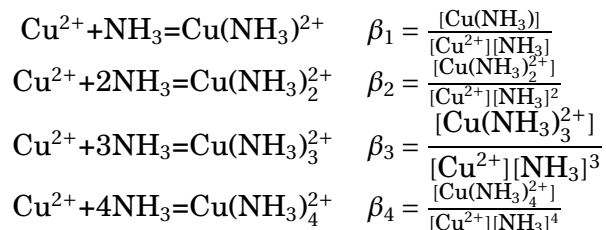
2.2. À l'équivalence,  $C_b V_b$  moles de  $\text{NH}_3$  ont réagi avec  $C_a V_a$  moles de  $\text{H}_3\text{O}^+$ ,

soit :  $C_a V_a = C_b V_b$ , d'où

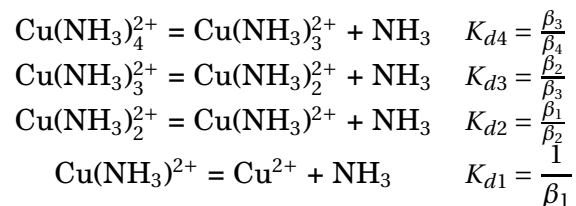
$$C_b = \frac{C_a V_a}{V_b} = 0,09 \text{ mol.L}^{-1}$$

### Partie 3 : Propriétés complexantes de $\text{NH}_3$

3.1. Les réactions de formation globales sont :



Les réactions de dissociation successives sont :



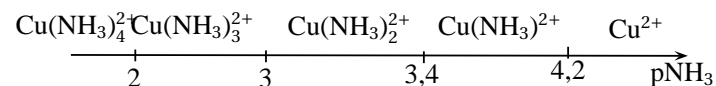
Numériquement :

$$pK_{d1} = 4,2 ; pK_{d2} = 3,4 ; pK_{d3} = 3,0 ; pK_{d4} = 2,0 ;$$

3.2. La définition de  $K_{di} = \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_{i-1}^{2+}][\text{NH}_3]}{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_i^{2+}]}$  permet d'écrire :

$$p\text{NH}_3 = pK_{di} + \log \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_{i-1}^{2+}]}{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_i^{2+}]}$$

On en déduit facilement le diagramme de prédominance :



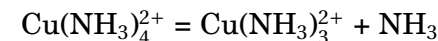
3.3.1 L'ammoniac est en excès. Comme les réactions de formation sont quantitatives, on peut former tous les complexes. La Réaction Prépondérante (RP) sera la formation globale de  $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$  de constante  $K = \beta_4$

qtte de mat.	$\text{Cu}^{2+} +$	$4 \text{NH}_3 =$	$\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$
état init.	$2 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-2}$	-
équilibre	$\epsilon$	$1,92 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-4}$

3.3.2 On en déduit que :

$$\begin{aligned} [\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}] &= \frac{2 \times 10^{-4}}{40 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \\ [\text{NH}_3] &= \frac{1,92 \times 10^{-2}}{40 \times 10^{-3}} = 4,8 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1} \\ [\text{Cu}^{2+}] &= \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]}{\beta_4 [\text{NH}_3]^4} = 2,4 \times 10^{-14} \text{ mol.L}^{-1} \end{aligned}$$

La RP suivante serait la dissociation



de constante  $K_{d4}$ . Son avancement vaut :

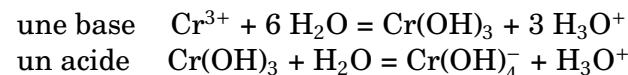
$$x = [\text{Cu}(\text{NH}_3)_3^{2+}] = \frac{K_{d4} [\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]}{[\text{NH}_3]} = 1,0 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

Comme  $10x < [\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]$  et  $10x < [\text{NH}_3]$ , on arrête le calcul ici et on garde les valeurs calculées précédemment.

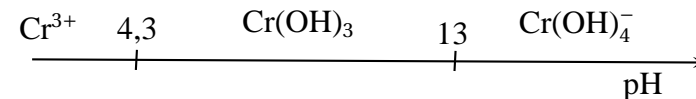
## Problème 2

### Centrale TSI 2007

1) a) On parle d'hydroxyde amphotère car  $\text{Cr}(\text{OH})_3$  est



b) Pour  $\text{pH} < 4,3$  on est dans le domaine de prédominance du soluté  $\text{Cr}^{3+}$   
 Pour  $4,3 < \text{pH} < 13$  on est dans le domaine d'existence du précipité  $\text{Cr}(\text{OH})_3$   
 Pour  $\text{pH} > 13$  on a le domaine de prédominance du soluté  $\text{Cr}(\text{OH})_4^-$



c) Pour  $\text{pH} < 4,3$   $s = [\text{Cr}^{3+}] = C_0$ . On lit sur le diagramme  $s = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ . On en déduit  $C_0 = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .

d) Le produit de solubilité est défini comme constante de la réaction



La précipitation débute pour  $[\text{Cr}^{3+}] = C_0$  et  $[\text{HO}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 10^{-14+4,3}$ .

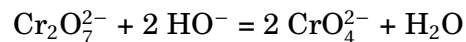
On a alors

$$K_s = 8 \times 10^{32}$$

2) a) En utilisant n.o.(O) = - II pour l'oxygène, on trouve que le n.o. du chrome est +VI dans les ions chromates et dichromates. La réaction de dosage n'est donc pas une réaction d'oxydo-réduction. Il s'agit ici d'une réaction acido-basique.

b) On utilise une électrode de verre qui donne une tension qui varie avec le pH.

c) La réaction de dosage est :



d) Le tableau d'avancement à l'équivalence s'écrit :

en mol	$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$	$+ 2 \text{HO}^-$	$= 2 \text{CrO}_4^{2-}$	$+ \text{H}_2\text{O}$
qtté init	$C_1 V_1$	$C_2 V_{\text{eq}}$	-	excès
équilibre	$C_1 V_1 - xi \approx 0$	$C_2 V_{\text{eq}} - 2xi \approx 0$	$2\xi$	excès

On a donc  $\xi = C_1 V_1 = \frac{C_2 V_{\text{eq}}}{2}$  soit

$$C_1 = \frac{C_2 V_{\text{eq}}}{2 V_1} = \frac{0,10 \times 17}{2 \times 100} = 8,5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

3) a) La réaction de dissolution du chromate d'argent s'écrit :

en mol	$\text{Ag}_2\text{CrO}_4$	$= 2 \text{Ag}^+$	$+ \text{CrO}_4^{2-}$
qtté init.	$n$	-	-
équilibre	$n - sV$	$2sV$	$sV$

La loi de GULDBERG et WAAGE donne :

$$K_s = [\text{Ag}^+]^2 [\text{CrO}_4^{2-}] = (2s)^2 \cdot s = 4s^3$$

d'où

$$s = \sqrt[3]{\frac{K_s}{4}} = \sqrt[3]{\frac{10^{-12}}{4}} = 6,3 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

b) Pour AgCl le même raisonnement conduit à :

$$K_s = [\text{Ag}^+]^2 [\text{Cl}^-] = s \cdot s$$

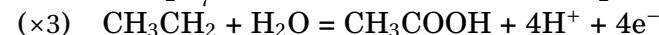
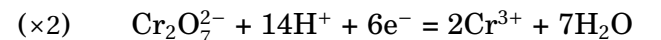
d'où

$$s = \sqrt{K_s} = \sqrt{10^{-10}} = 1 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

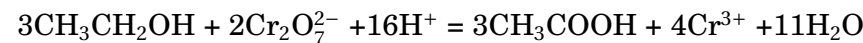
On a donc  $s_{\text{Ag}_2\text{CrO}_4} > s_{\text{AgCl}}$  donc le chromate d'argent est plus soluble.

c) On place un peu de chromate d'argent dans le bécher contenant les ions  $\text{Cl}^-$  et du nitrate d'argent dans la burette. AgCl précipite le premier. Dès que tous les ions  $\text{Cl}^-$  ont disparu, le chromate d'argent précipite et caractérise ainsi l'équivalence. C'est la méthode de MOHR.

4) a) Les deux demi-équations sont :



d'où la réaction :



b) Cette réaction est utilisée dans les éthylotests où on exploite le changement de couleur ( $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  orange –  $\text{Cr}^{3+}$  vert)

## Problème 3

1. On étudie le canon représenté par son centre de gravité G dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les forces s'exerçant sur le canon sont : son poids (vertical), une réaction du support (verticale) et la force du ressort (horizontale)  $\vec{F} = -k_1(\ell - L_0)\vec{e}_x$  où  $\ell$  représente la longueur du ressort. À l'équilibre, la somme des forces est nulle, ce qui par projection sur  $Ox$  impose  $\ell = L_0$ .

2. Le déplacement de G est horizontal, donc la seule force qui travaille est la force du ressort qui dérive d'une énergie potentielle. On en déduit que l'énergie mécanique du canon est constante.

La longueur du ressort étant égale à  $x$ , l'énergie mécanique vaut :

$$E_m = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - L_0)^2$$

À  $t = 0$ , le canon n'a pas encore bougé donc  $x = L_0$  et  $v = v_c$  d'où  $E_m = \frac{1}{2}Mv_c^2$ . Lorsque G atteint la distance de recul  $d$ , sa vitesse est nulle et  $x = L_0 - d$ , soit  $E_m = \frac{1}{2}kd^2$ . On en déduit donc :

$$\frac{1}{2}Mv_c^2 = \frac{1}{2}kd^2 \quad \text{soit} \quad d = \sqrt{\frac{M}{k_1}}v_c = \frac{m}{\sqrt{k_1M}}v_0$$

On en déduit  $k_1 = \frac{m^2 v_0^2}{d^2 M} = 1800 \text{N.m}^{-1}$ .

3. Si on applique la RFD en projection sur  $Ox$ , il vient :

$$M\ddot{x} = -k_1(x - L_0) \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 L_0$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{k_1/M}$ . La solution est de la forme :

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + L_0$$

À  $t = 0$ , on a  $x = A + L_0 = L_0$ , donc  $A = 0$ . On en déduit  $\dot{x} = B\omega_0 \cos\omega_0 t$ . Comme  $\dot{x}(0) = \omega_0 B = -mv_0/M$ , on obtient  $B = -\frac{mv_0}{M\omega_0}$  et finalement :

$$x(t) = -\frac{mv_0}{M\omega_0} \sin\omega_0 t + L_0 = -\frac{mv_0}{\sqrt{k_1M}} \sin\omega_0 t + L_0$$

La valeur absolue de l'amplitude du sinus est égale à  $d$  ce qui donne la même valeur que précédemment.

4. Comme le montre la solution précédente, avec un ressort seul, le canon oscille et repart donc en avant après le recul. En pratique l'amplitude diminuera à cause des frottement mais il faudra un certain temps avant d'atteindre l'immobilisation. D'où l'intérêt d'ajouter une force de frottement visqueuse pour réduire ce temps d'immobilisation.
5. La variation d'énergie mécanique est maintenant égale à l'énergie absorbée par le dispositif de freinage, soit  $\Delta E_m = -E_a$ . Or, au départ,  $E_m = E_c = Mv_c^2/2$ , et à la fin  $E_m = E_p = k_2 d^2/2$ ; on en déduit :

$$\frac{1}{2}k_2 d^2 - \frac{1}{2}Mv_c^2 = -E_a \quad \text{d'où} \quad k_2 = \frac{1}{d^2}(Mv_c^2 - 2E_a) = 244 \text{N.m}^{-1}$$

La pulsation propre est  $\omega_0 = \sqrt{k_2/M} = 0,55$ .

6. La RFD en projection sur  $Ox$  donne :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{M}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 L_0$$

Le discriminant de l'équation caractéristique  $\Delta = \left(\frac{\lambda}{M}\right)^2 - 4\omega_0^2$  est nul dans le cas d'un régime critique, ce qui impose :

$$\lambda = 2M\omega_0 = 884 \text{kg.s}^{-1}$$

7. La solution de l'équation est alors :

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2M}t\right)(At + B) + L_0$$

À  $t = 0$ ,  $x = L_0$  donc  $B = 0$ . La vitesse vaut alors :

$$\dot{x} = A \exp\left(-\frac{\lambda}{2M}t\right)\left(1 - \frac{\lambda}{2M}t\right)$$

soit à  $t = 0$ ,  $\dot{x} = A = v_c$ . Finalement :

$$x(t) = v_c t \exp\left(-\frac{\lambda}{2M}t\right) + L_0 = -\frac{m}{M}v_0 t \exp\left(-\frac{\lambda}{2M}t\right) + L_0$$



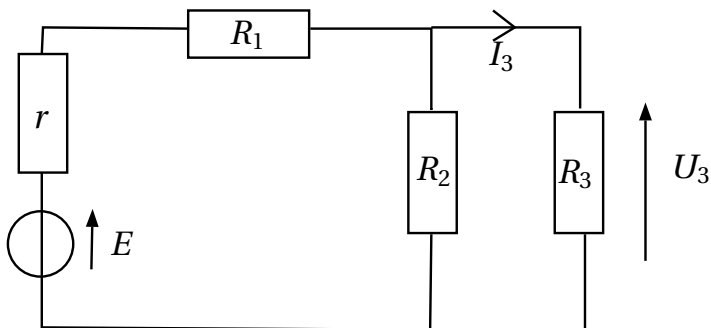
Le recul est maximal lorsque la vitesse s'annule soit pour  $t_m = 2M/\lambda = 1,8$ .  
On peut alors écrire la valeur de  $x$  à  $t_m$  :

$$x(t_m) = -\frac{m}{M}v_0 t \exp(-1) + L_0 = L_0 - d$$

On en déduit  $d = \frac{2mv_0}{\lambda e} = 1 \text{ m}$ . On retrouve la même valeur que précédemment.

## Problème 4

1. Nous reprenons le montage en indiquant la tension  $U_3$  et l'intensité  $I_3$  à déterminer.



a. La tension  $U_3$  peut être obtenue en appliquant la formule du diviseur de tension :

$$U_3 = \frac{R_2 \parallel R_3}{r + R + R_2 \parallel R_3} E \quad \text{où} \quad R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

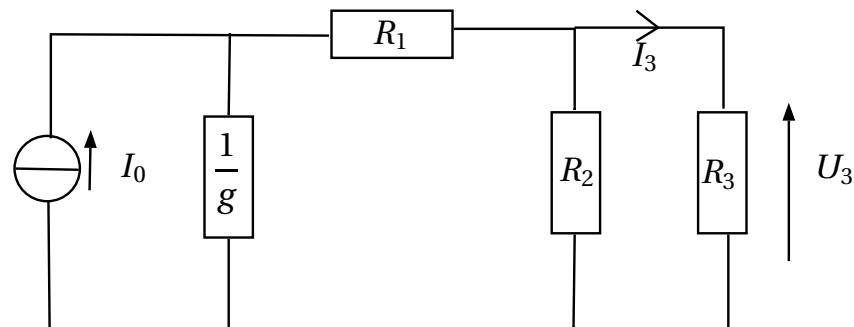
soit

$$U_3 = \frac{R_2 R_3}{(r + R)(R_2 + R_3) + R_2 R_3} E$$

L'intensité  $I_3$  s'obtient par la loi d'OHM

$$I_3 = \frac{R_2 R_3}{(r + R)(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \frac{E}{R_3}$$

b. Le montage est maintenant :



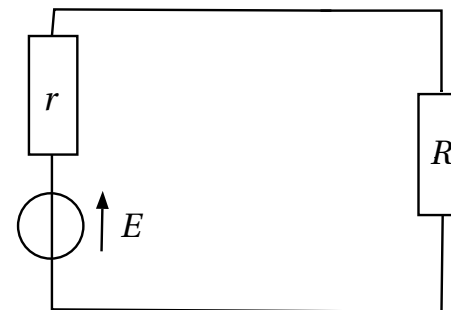
Le problème se traite en utilisant l'équivalent THÉVENIN de la source de courant avec  $E = \frac{I_0}{g}$  et  $r = \frac{1}{g}$ . On a alors :

$$U_3 = \frac{R_2 R_3}{(1/g + R)(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \frac{I_0}{g}$$

L'intensité  $I_3$  s'obtient par la loi d'OHM

$$I_3 = \frac{R_2 R_3}{(1/g + R)(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \frac{I_0}{g R_3}$$

2. Le montage considéré est :



a. D'après la loi de PUILLET :  $I = \frac{E}{R + r}$

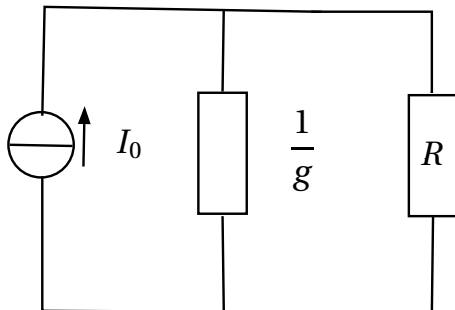
b. La puissance est donnée en fonction de  $R$  par :  $\mathcal{P}(R) = RI^2 = \frac{R}{(R + r)^2} E^2$ .

La puissance  $\mathcal{P}$  est extrémale pour  $\frac{d\mathcal{P}}{dR} = \frac{(r^2 - R^2)}{(R + r)^4} E^2 = 0$ ; Le tableau de variation de  $\mathcal{P}(R)$  est :

$R$	$0$	$r$	$+\infty$
$\frac{d\mathcal{P}}{dR}$	$+$	$0$	$-$
$\mathcal{P}$	$\nearrow$		$\searrow$

d'où on déduit  $R_{\max} = r$ .

c. Le montage devient maintenant :



Le circuit est constitué de 3 branches en parallèle : le générateur de courant parfait, sa résistance interne  $r = 1/g$ , et la résistance  $R = 1/G$ . Aux bornes de l'ensemble, la tension vaut :  $U = \frac{I_0}{G+g}$ .

La puissance dans  $R$  vaut :  $P = GU^2 = \frac{G}{(G+g)^2} I_0^2$ . Les expressions sont donc analogues à celles de la question précédente, en remplaçant  $r$  par  $g$ ,  $R$  par  $G$  et  $E$  par  $I_0$ . La conductance qui correspond à une puissance maximale vaut donc :  $G_{\max} = g$ .